

GENERALIZED KANTOR DOUBLE

Ivan Kaygorodov

*Sobolev Inst. of Mathematics
Novosibirsk, Russia
kib@math.nsc.ru*

Abstract:

We find necessary and sufficient conditions for a generalized Kantor double to be Jordan. We also describe δ -superderivations of a generalized Kantor double whose even part is prime.

Key words: Kantor double, Jordan superalgebra, δ -superderivation.

1 Предварительные сведения

Пусть F — поле характеристики $p \neq 2$. Супералгеброй над полем F называется алгебра A , такая что $A = A_0 \oplus A_1$ с условием $A_i A_j \subseteq A_{i+j(mod 2)}$. Элементы супералгебры $A = A_0 \oplus A_1$ из множества $A^* = A_0 \cup A_1$ будем называть однородными. Для однородного элемента x супералгебры A будем считать $p(x) = i$, если $x \in A_i$.

Алгебра A над полем F называется йордановой, если она удовлетворяет тождествам

$$xy = yx, (x^2 y)x = x^2 (yx).$$

Пусть G — алгебра Грассмана над F , заданная образующими $1, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ и определяющими соотношениями: $\xi_i^2 = 0, \xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i$. Элементы $1, \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} (i_1 < \dots < i_k)$ образуют базис алгебры G над F . Обозначим через G_0 и G_1 подпространства, порожденные, соответственно, произведениями четной и нечетной длины; тогда G представляется в виде прямой суммы этих подпространств: $G = G_0 \oplus G_1$, при этом справедливы соотношения $G_i G_j \subseteq G_{i+j(mod 2)}, i, j = 0, 1$.

Под суперпространством мы понимаем \mathbb{Z}_2 -градуированное пространство. На пространстве $End(A)$ эндоморфизмов супералгебры $A = A_0 + A_1$ зададим структуру супералгебры, таким образом, что четными элементами будем считать те эндоморфизмы, которые инвариантны на A_0 и A_1 , а нечетными элементами будем считать такие эндоморфизмы ϕ , что $\phi(A_i) \subseteq A_{i+1}$.

Для супералгебры A подалгебра

$$G(A) = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$$

в тензорном произведении $G \otimes A$ называется грассмановой оболочкой супералгебры A .

Если Ω — некоторое многообразие алгебр над F . Супералгебра A называется Ω -супералгеброй, если $G(A) \in \Omega$. Таким образом, супералгебра A является йордановой супералгеброй, если ее грассманова оболочка $G(A)$ является йордановой алгеброй.

Дубль Кантора [1]. Пусть $\Gamma = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с единицей 1 и $\{, \} : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ — суперкососимметрическое билинейное отображение, которое мы будем называть скобкой. По супералгебре Γ и скобке $\{, \}$ можно построить супералгебру $J(\Gamma, \{, \})$. Рассмотрим $J(\Gamma, \{, \}) = \Gamma \oplus \Gamma x$ — прямую сумму пространств, где Γx — изоморфная копия пространства Γ . Считаем, что $D(a) = \{a, 1\}$. Пусть a, b — однородные элементы из Γ . Тогда операция умножения \cdot на $J(\Gamma, \{, \})$ определяется формулами

$$a \cdot b = ab, a \cdot bx = (ab)x, ax \cdot b = (-1)^{p(b)}(ab)x, ax \cdot bx = (-1)^{p(b)}\{a, b\}.$$

Положим $A = \Gamma_0 + \Gamma_1 x$, $M = \Gamma_1 + \Gamma_0 x$. Тогда $J(\Gamma, \{, \}) = A \oplus M$ — \mathbb{Z}_2 -градуированная алгебра.

Для унитарной супералгебры скобка $\{, \}$ называется йордановой, если при однородных элементах $f_i, g_j, h_k \in \Gamma_i$ выполняются следующие соотношения

$$\{f_i, g_j h_k\} = \{f_i, g_j\} h_k + (-1)^{ij} g_j \{f_i, h_k\} - D(f_i) g_j h_k, \quad (1)$$

$$\{f_i, \{g_j, h_k\}\} = \{\{f_i, g_j\}, h_k\} + (-1)^{ij} g_j \{\{f_i, h_k\}\} +$$

$$D(f_i) \{g_j, h_k\} + (-1)^{ji} D(g_j) \{h_k, f_i\} + (-1)^{k(j+i)} D(h_k) \{f_i, g_j\}. \quad (2)$$

В дальнейшем, элементы k_i, f_i, g_i, h_i мы будем всегда считать однородными.

Хорошо известно [2, 3], что супералгебра $J(\Gamma, \{, \})$ йорданова тогда и только тогда, когда скобка $\{, \}$ является йордановой. В силу йордановости супералгебры $J(\Gamma, \{, \})$ получаем, что $D : a \rightarrow \{a, 1\}$ — дифференцирование супералгебры Γ .

Если D — нулевое дифференцирование, то $\{, \}$ является скобкой Пуассона, т.е.

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{p(a)p(b)} b\{a, c\}$$

и Γ — супералгебра Ли относительно операции $\{, \}$. Произвольная скобка Пуассона является йордановой скобкой [4].

Хорошо известно [2, 3], что йорданова супералгебра $J = \Gamma + \Gamma x$, полученная с помощью процесса удвоения Кантора, будет являться простой тогда и только тогда, когда Γ не имеет ненулевых идеалов B с условием $\{\Gamma, B\} \subseteq B$.

Супералгебра векторного типа $J(\Gamma, D)$. Пусть Γ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с ненулевым четным дифференцированием D . Определим на Γ скобку $\{, \}$ полагая $\{a, b\} = D(a)b - aD(b)$. Тогда скобка $\{, \}$ — йорданова скобка. Полученную супералгебру $J(\Gamma, \{, \})$ будем обозначать как $J(\Gamma, D)$.

2 Йордановость обобщенного дубля Кантора

В данной части работы мы рассмотрим обобщенный дубль Кантора. Мы ослабим условие унитарности и суперкоммутативности супералгебры Γ и построим супералгебру $J(\Gamma, \{, \})$ по аналогии с выше приведенной конструкцией. Если супералгебра Γ обладает дифференцированием D , то, задав скобку $\{, \}$ по правилу $\{a, b\} = D(a)b - aD(b)$, мы получим супералгебру векторного типа (не обязательно унитарную).

Легко заметить, что условие простоты супералгебры $J(\Gamma, \{, \})$ влечет отсутствие идеалов I в супералгебре Γ с условием $\{I, \Gamma\} \subseteq I$. В противном случае, в супералгебре $J(\Gamma, \{, \})$ мы имели бы ненулевой градуированный идеал $I + Ix$.

Скобка $\{, \}$, определенная на супералгебре Γ , называется йордановой, если

$$\begin{aligned} & (-1)^{(i+j)l} \{ \{f_i, h_k\} g_j, k_l \} + (-1)^{(k+j)i} \{ \{h_k, k_l\} g_j, f_i \} + \\ & (-1)^{(l+j)k} \{ \{k_l, f_i\} g_j, h_k \} = (-1)^{(i+j)l} \{f_i, h_k\} \{g_j, k_l\} + \\ & (-1)^{(k+j)i} \{h_k, k_l\} \{g_j, f_i\} + (-1)^{(l+j)k} \{k_l, f_i\} \{g_j, h_k\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & (-1)^{(k+j)i} (\{h_k k_l, g_j\} f_i - h_k k_l \{g_j, f_i\}) = \\ & (-1)^{(l+j)k} (\{k_l f_i, g_j\} h_k - k_l f_i \{g_j, h_k\}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & (-1)^{(i+j)l} (\{f_i h_k g_j, k_l\} - f_i h_k \{g_j, k_l\}) = \\ & (-1)^{(k+j)i} (\{h_k k_l, g_j\} f_i - \{h_k k_l, g_j f_i\}) + \\ & (-1)^{(l+j)k} (\{k_l f_i, g_j\} h_k - \{k_l f_i, g_j h_k\}). \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 2.1. Обобщенный дубль Кантора $J(\Gamma, \{, \})$ является йордановой супералгеброй тогда и только тогда, когда скобка $\{, \}$ является йордановой и супералгебра Γ — суперкоммутативна.

Доказательство. Известно, что йорданова супералгебра удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{g}_j - (-1)^{ij} \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{f}_i = 0, \quad (6)$$

$$(-1)^{(i+j)l} [\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{h}_k, \mathbf{g}_j, \mathbf{k}_l] +$$

$$(-1)^{(k+j)i} [\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{k}_l, \mathbf{g}_j, \mathbf{f}_i] + (-1)^{(l+j)k} [\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{h}_k] = 0, \quad (7)$$

где $[f, g, h] = (f \cdot g) \cdot h - f \cdot (g \cdot h)$ — обычный неградуированный ассоциатор и $\mathbf{f}_i = f_i + f_{i+1}x$ — базисные элементы $J_i = F_i + F_{i+1}x$.

Легко заметить, что супералгебра $J(\Gamma, \{, \})$ удовлетворяет условию (6) тогда и только тогда, когда Γ — суперкоммутативная супералгебра.

Для установления эквивалентности между тождеством (7) и соотношениями йордановой скобки (3-5) нам достаточно проверить эквивалентность на однородных элементах супералгебры $J(\Gamma, \{, \})$. В дальнейшем, считаем, что $f_t, g_t, h_t, k_t \in \Gamma_t$. Поскольку Γ — ассоциативна, то

$$\begin{aligned} [f_i \cdot h_k, g_j, k_l] &= 0, [f_i x \cdot h_k, g_j, k_l] = 0, [f_i \cdot h_k x, g_j, k_l] = 0, \\ [f_i \cdot h_k, g_j x, k_l] &= 0, [f_i \cdot h_k, g_j, k_l x] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно рассмотреть случаи, когда в тождестве (7) среди элементов $\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{h}_k, \mathbf{k}_l$ два или более являются элементами Γx . Проведем последовательные вычисления.

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^{(i+j)l} [f_{i+1}x \cdot h_{k+1}x, g_{j+1}x, k_{l+1}x] + \\ & (-1)^{(k+j)i} [h_{k+1}x \cdot k_{l+1}x, g_{j+1}x, f_{i+1}x] + (-1)^{(l+j)k} [k_{l+1}x \cdot f_{i+1}x, g_{j+1}x, h_{k+1}x] = \\ & (-1)^{(i+j)l+k+l} (\{ \{f_{i+1}, h_{k+1}\} g_{j+1}, k_{l+1} \} - \{f_{i+1}, h_{k+1}\} \{g_{j+1}, k_{l+1}\}) + \end{aligned}$$

$$(-1)^{(k+j)i+l+i}(\{h_{k+1}, k_{l+1}\}g_{j+1}, f_{i+1}\} - \{h_{k+1}, k_{l+1}\}\{g_{j+1}, f_{i+1}\}) + \\ (-1)^{(l+j)k+i+k}(\{k_{l+1}, f_{i+1}\}g_{j+1}, h_{k+1}\} - \{k_{l+1}, f_{i+1}\}\{g_{j+1}, h_{k+1}\}).$$

Легко заметить, что мы получаем аналог тождества (3).

$$0 = (-1)^{(i+j)l}[f_{i+1}x \cdot h_{k+1}x, g_{j+1}x, k_l] +$$

$$(-1)^{(k+j)i}[h_{k+1}x \cdot k_l, g_{j+1}x, f_{i+1}x] + (-1)^{(l+j)k}[k_l \cdot f_{i+1}x, g_{j+1}x, h_{k+1}x] = \quad (8)$$

$$(-1)^{(i+j)l+k+l+1}(\{f_{i+1}, h_{k+1}\}g_{j+1}k_l - \{f_{i+1}, h_{k+1}\}g_{j+1}k_l)x + \\ (-1)^{(k+j)i+l+j+1}(\{h_{k+1}k_l, g_{j+1}\}f_{i+1} - h_{k+1}k_l\{g_{j+1}, f_{i+1}\})x + \\ (-1)^{(l+j)k+j+1}(\{k_l f_{i+1}, g_{j+1}\}h_{k+1} - k_l f_{i+1}\{g_{j+1}, h_{k+1}\})x.$$

Заметим, что мы имеем аналог тождества (4).

Вычисляя, видим что $[fx \cdot hx, g, kx] = 0$, следовательно, при подстановке $\mathbf{f}_i = f_{i+1}x, \mathbf{g}_j = g_j, \mathbf{h}_k = h_{k+1}x, \mathbf{k}_l = k_{l+1}x$ в соотношение (7), в правой части мы имеем нулевое выражение.

$$0 = (-1)^{(i+j)l}[f_{i+1}x \cdot h_k, g_{j+1}x, k_{l+1}x] + \\ (-1)^{(k+j)i}[h_k \cdot k_{l+1}x, g_{j+1}x, f_{i+1}x] + (-1)^{(l+j)k}[k_{l+1}x \cdot f_{i+1}x, g_{j+1}x, h_k]$$

Отметим, что при замене $f_i \mapsto h_k, h_k \mapsto k_l, k_l \mapsto f_i$ мы получим выражение (8), которое эквивалентно (4).

$$0 = (-1)^{(i+j)l}[f_i \cdot h_{k+1}x, g_{j+1}x, k_{l+1}x] + \\ (-1)^{(k+j)i}[h_{k+1}x \cdot k_{l+1}x, g_{j+1}x, f_i] + (-1)^{(l+j)k}[k_{l+1}x \cdot f_i, g_{j+1}x, h_{k+1}x]$$

Элементарно заметить, что при замене $f_i \mapsto k_l, k_l \mapsto h_k, h_k \mapsto f_i$ мы получим выражение (8), которое эквивалентно (4).

$$0 = (-1)^{(i+j)l}[f_i \cdot h_k, g_{j+1}x, k_{l+1}x] +$$

$$(-1)^{(k+j)i}[h_k \cdot k_{l+1}x, g_{j+1}x, f_i] + (-1)^{(l+j)k}[k_{l+1}x \cdot f_i, g_{j+1}x, h_k] = \quad (9)$$

$$(-1)^{(i+j)l+l+1}(\{f_i h_k g_{j+1}, k_{l+1}\} - f_i h_k \{g_{j+1}, k_{l+1}\}) + \\ (-1)^{(k+j)i+j+1}(\{h_k k_{l+1}, g_{j+1}\}f_i - \{h_k k_{l+1}, g_{j+1}\}f_i) + \\ (-1)^{(l+j)k+i+j+1}(\{k_{l+1}f_i, g_{j+1}\}h_k - \{k_{l+1}f_i, g_{j+1}\}h_k).$$

Очевидно замечаем, что мы имеем аналог тождества (5).

$$0 = (-1)^{(i+j)l}[f_i \cdot h_{k+1}x, g_j, k_{l+1}x] + \\ (-1)^{(k+j)i}[h_{k+1}x \cdot k_{l+1}x, g_j, f_i] + (-1)^{(l+j)k}[k_{l+1}x \cdot f_i, g_j, h_{k+1}x] = \\ (-1)^{(i+j)l+j+l+1}(\{f_i h_{k+1}g_j, k_{l+1}\} - \{f_i h_{k+1}, g_j k_{l+1}\}) + \\ (-1)^{(k+j)i+l+1}(\{h_{k+1}, k_{l+1}\}g_j f_i - \{h_{k+1}, k_{l+1}\}g_j f_i) + \\ (-1)^{(l+j)k+i+j+k+1}(\{k_{l+1}f_i g_j, h_{k+1}\} - \{k_{l+1}f_i, g_j h_{k+1}\}).$$

Легко заметить, что полученное соотношение эквивалентно

$$(-1)^{(i+j)l}(\{f_i h_k g_j, k_l\} - \{f_i h_k, g_j k_l\}) =$$

$$(-1)^{(l+j)k}(\{k_l f_i g_j, h_k\} - \{k_l f_i, g_j h_k\}). \quad (10)$$

$$0 = (-1)^{(i+j)l}[f_i \cdot h_{k+1}x, g_{j+1}x, k_l] + \\ (-1)^{(k+j)i}[h_{k+1}x \cdot k_l, g_{j+1}x, f_i] + (-1)^{(l+j)k}[k_l \cdot f_i, g_{j+1}x, h_{k+1}x]$$

Заметим, что при замене $f_i \mapsto h_k, h_k \mapsto k_l, k_l \mapsto f_i$ мы имеем выражение (9), которое эквивалентно (5).

$$0 = (-1)^{(i+j)l}[f_{i+1}x \cdot h_k, g_j, k_{l+1}x] + \\ (-1)^{(k+j)i}[h_k \cdot k_{l+1}x, g_j, f_{i+1}x] + (-1)^{(l+j)k}[k_{l+1}x \cdot f_{i+1}x, g_j, h_{k+1}x]$$

Легко заметить, что при замене $f_i \mapsto k_l, k_l \mapsto h_k, h_k \mapsto f_i$ мы получим выражение эквивалентное (10).

$$0 = (-1)^{(i+j)l} [f_{i+1}x \cdot h_k, g_{j+1}x, k_l] + (-1)^{(k+j)i} [h_k \cdot k_l, g_{j+1}x, f_{i+1}x] + (-1)^{(l+j)k} [k_l \cdot f_{i+1}x, g_{j+1}x, h_k]$$

Очевидно замечаем, что при замене $f_i \mapsto k_l, k_l \mapsto h_k, h_k \mapsto f_i$ мы имеем выражение (9), которое эквивалентно (5).

$$0 = (-1)^{(i+j)l} [f_{i+1}x \cdot h_{k+1}x, g_j, k_l] + (-1)^{(k+j)i} [h_{k+1}x \cdot k_l, g_j, f_{i+1}x] + (-1)^{(l+j)k} [k_l \cdot f_{i+1}x, g_j, h_{k+1}x]$$

Легко заметить, что при замене $f_i \mapsto h_k, h_k \mapsto k_l, k_l \mapsto f_i$ мы получим выражение эквивалентное (10).

Для доказательства теоремы осталось показать, что система тождеств (5,10) эквивалентна системе тождеств (4,5). Из (10) и (5) можем получить

$$\begin{aligned} & (-1)^{(i+j)l} \{f_i h_k, g_j k_l\} + (-1)^{(l+j)k} \{k_l f_i g_j, h_k\} + (-1)^{(k+j)i} \{h_k k_l, g_j f_i\} = \\ & (-1)^{(i+j)l} f_i h_k \{g_j, k_l\} + (-1)^{(l+j)k} \{k_l f_i, g_j\} h_k + (-1)^{(k+j)i} \{h_k k_l, g_j\} f_i. \end{aligned}$$

Откуда, путем замены $h_k \mapsto k_l, k_l \mapsto h_k$ получим

$$\begin{aligned} & (-1)^{(i+j)k} \{f_i k_l, g_j h_k\} + (-1)^{(k+j)l} \{h_k f_i g_j, k_l\} + (-1)^{(l+j)i} \{k_l h_k, g_j f_i\} = \\ & (-1)^{(i+j)k} f_i k_l \{g_j, h_k\} + (-1)^{(k+j)l} \{h_k f_i, g_j\} k_l + (-1)^{(l+j)i} \{k_l h_k, g_j\} f_i. \end{aligned}$$

Применим (5) и получим

$$\begin{aligned} & (-1)^{(i+j)k} f_i k_l \{g_j, h_k\} + (-1)^{(k+j)l} \{h_k f_i, g_j\} k_l + (-1)^{(l+j)i} \{k_l h_k, g_j\} f_i = \\ & (-1)^{ik+il+lk} ((-1)^{il+jl} f_i h_k \{g_j, k_l\} + (-1)^{(k+j)i} \{h_k k_l, g_j\} f_i + (-1)^{(l+j)k} \{k_l f_i, g_j\} h_k). \end{aligned}$$

Откуда, путем замены $f_i \mapsto k_l, k_l \mapsto f_i$, получаем

$$\begin{aligned} & (-1)^{(l+j)k} k_l f_i \{g_j, h_k\} + (-1)^{(k+j)l} \{h_k k_l, g_j\} f_i = \\ & (-1)^{(k+j)i} h_k k_l \{g_j, f_i\} + (-1)^{(l+j)k} \{k_l f_i, g_j\} h_k. \end{aligned}$$

Что, в свою очередь, является полным аналогом (4). Таким образом, теорема доказана.

Отметим, что для неунитальной ассоциативно-суперкоммутативной супералгебры Γ с дифференцированием D супералгебра векторного типа $J(\Gamma, D)$ будет являться йордановой. Доказательство легко следует из проверки тождеств (3-5).

3 О δ -супердифференцированиях обобщенного дубля Кантора с первичной четной частью

Исследование δ -дифференцирований вытекает из работ Н. С. Хопкинса [5] и В. Т. Филипова [6], где рассматривались антидифференцирования (т.е. (-1) -дифференцирования) алгебр Ли. В дальнейшем, эти результаты получили обобщение в работах В. Т. Филипова [7, 8]. Дальнейшее исследование δ -дифференцирований связано с работами В. Т. Филипова [9], И. Б. Кайгородова [11, 12, 13, 15], И. Б. Кайгородова и В. Н. Желябина [14], и П.

Зусмановича [10]. В результате, были описаны δ -дифференцирования первичных ассоциативных, альтернативных, лиевых и мальцевских нелиевых алгебр, полупростых йордановых алгебр, первичных лиевых супералгебр, полупростых конечномерных йордановых супералгебр и простых унитарных супералгебр йордановой скобки. Более подробную информацию по описанию δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований можно найти в обзоре [16].

Однородный элемент ψ суперпространства эндоморфизмов $A \rightarrow A$ называется супердифференцированием, если

$$\psi(xy) = \psi(x)y + (-1)^{p(x)p(\psi)}x\psi(y).$$

Рассмотрим супералгебру Ли A и зафиксируем элемент $x \in A_i$. Тогда $u_x : y \rightarrow [x, y]$ является супердифференцированием супералгебры A и его четность $p(u_x) = i$.

Для фиксированного элемента δ из основного поля, под δ -супердифференцированием супералгебры $A = A_0 \oplus A_1$ мы понимаем однородное линейное отображение $\phi : A \rightarrow A$, такое что для однородных $x, y \in A$ выполнено

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + (-1)^{p(x)p(\phi)}x\phi(y)). \quad (11)$$

Под суперцентроидом $\Gamma_s(A)$ супералгебры A мы будем понимать множество всех однородных линейных отображений $\chi : A \rightarrow A$, для произвольных однородных элементов a, b удовлетворяющих условию

$$\chi(ab) = \chi(a)b = (-1)^{p(a)p(\chi)}a\chi(b).$$

Центроид алгебры A определяется по аналогии и обозначается $\Gamma(A)$.

Заметим, что 1-супердифференцирование является обыкновенным супердифференцированием; 0-супердифференцированием является произвольный эндоморфизм ϕ супералгебры A такой, что $\phi(A^2) = 0$.

Ненулевое δ -супердифференцирование ϕ будем считать нетривиальным, если $\delta \neq 0, 1$ и $\phi \notin \Gamma_s(A)$.

В данной части мы рассмотрим δ -супердифференцирования обобщенного дубля Кантора $J(\Gamma, \{, \})$, построенном исходя из $A = \Gamma$ — первичной ассоциативной алгебры и скобки $\{, \}$. Напомним, что A является первичной алгеброй, если из равенства $aAb = 0$ для некоторых элементов a, b алгебры A следует, что либо $a = 0$ либо $b = 0$.

В дальнейшем, через $(\Delta_{\frac{1}{2}}(J(\Gamma, \{, \})))_i$ будем обозначать пространство $\frac{1}{2}$ -супердифференцирований супералгебры $J(\Gamma, \{, \})$, имеющих четность i .

Теорема 3.1. *Супералгебра $J(\Gamma, \{, \})$ не имеет ненулевых δ -супердифференцирований, если $\delta \neq 0, \frac{1}{2}, 1$. Если ϕ — четное $\frac{1}{2}$ -супердифференцирование $J(\Gamma, \{, \})$, то $\{\phi|_A, \phi \in (\Delta_{\frac{1}{2}}(J(\Gamma, \{, \})))_0\} = \Gamma(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{, \})$ и $\phi(ax) = \phi|_A(a)x$. В частности, если $J(\Gamma, \{, \})$ — супералгебра векторного типа, то $\{\phi|_A, \phi \in (\Delta_{\frac{1}{2}}(J(\Gamma, \{, \})))_0\} = \Gamma(A)$.*

Доказательство. Пусть ϕ — четное δ -супердифференцирование и $\phi(cx) = \phi_c x$. Рассмотрим ограничение $\phi|_A$ на подалгебру A . Таким образом, $\phi|_A$ есть δ -дифференцирование первичной ассоциативной алгебры A . Согласно [9], при $\delta = \frac{1}{2}$ имеем $\phi|_A \in \Gamma(A)$, а при $\delta \neq \frac{1}{2}$ имеем $\phi|_A = 0$.

В дальнейшем, через a, b, c, d мы обозначаем произвольные элементы алгебры A . Рассмотрим случай $\delta \neq \frac{1}{2}$, тогда

$$\delta^2 ab\phi(cx) = \delta a\phi(bcx) = \phi(abcx) = \delta ab\phi(cx),$$

что влечет $ab\phi(cx) = 0$, то есть $ab\phi_c = 0$. В силу первичности A , это влечет $\phi_c = 0$. Таким образом, мы имеем тривиальность ϕ .

Если $\delta = \frac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{2}\phi(a)bcx + \frac{1}{4}a\phi(b)cx + \frac{1}{4}ab\phi(cx) = \phi(abcx) = \frac{1}{2}\phi(ab)cx + \frac{1}{2}ab\phi(cx).$$

Откуда, пользуясь тем, что $\phi(a)bc = ab\phi(c) = a\phi(b)c = \phi(ab)c$, легко получаем

$$ab(\phi_c - \phi(c)) = 0,$$

что, в силу первичности A , дает $\phi(c) = \phi_c$. Отметим, что

$$\phi\{a, b\} = \phi(ax \cdot bx) = \frac{1}{2}(\phi(ax) \cdot bx + ax \cdot \phi(bx)) = \frac{1}{2}\{\phi(a), b\} + \frac{1}{2}\{a, \phi(b)\},$$

то есть $\phi|_A \in \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{, \})$. Заметим, что любой элемент $\psi|_A \in \Gamma(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{, \})$ продолжается до четного $\frac{1}{2}$ -супердифференцирования ψ по правилу $\psi(ax) = \psi|_A(a)x$.

Пусть ϕ — нечетное $\frac{1}{2}$ -супердифференцирование супералгебры $J(\Gamma, \{, \})$, тогда

$$\delta^2\phi(a)bc + \delta^2a\phi(b)c + \delta ab\phi(c) = \phi(abc) = \delta\phi(a)bc + \delta^2a\phi(b)c + \delta^2ab\phi(c).$$

Откуда легко следует $\phi(a)bc = ab\phi(c)$, пользуясь чем, имеем

$$\phi(ab)dc = abd\phi(c) = a\phi(b)dc.$$

Откуда, в силу первичности A , вытекает $\phi(ab) = \phi(a)b = a\phi(b)$. Воспользовавшись (11), имеем

$$\phi(ab) = \delta(\phi(a)b + a\phi(b)) = 2\delta\phi(ab).$$

Таким образом, возможны два случая $\delta = \frac{1}{2}$ или $\delta \neq \frac{1}{2}$ и $\phi(ab) = 0$.

Из второго случая, легко вытекает $0 = \phi(ab)c = \phi(a)bc$. Откуда в силу первичности A , получаем $\phi(A) = 0$. Осталось заметить, что

$$\delta ab\phi(cx) + \delta\phi(ab) \cdot cx = \phi(abcx) = \delta\phi(a)(bcx) + \delta^2a(\phi(b) \cdot cx) + \delta^2ab\phi(cx),$$

то есть $(\delta^2 - \delta)ab\phi(cx) = 0$. Таким образом, используя первичность A , имеем $\phi(cx) = 0$. Основное утверждение теоремы доказано.

Отметим, что если $J(\Gamma, \{, \})$ — супералгебра векторного типа и $\phi|_A \in \Gamma(A)$, то

$$D(a\phi|_A(b) - \phi|_A(a)b) = 0,$$

$$D(a)\phi|_A(b) + aD(\phi|_A(b)) - (D(\phi|_A(a))b - \phi|_A(a)D(b)) = 0,$$

$$2\phi|_A(D(a)b - aD(b)) = D(\phi|_A(a))b - \phi|_A(a)D(b) + D(a)\phi|_A(b) - aD(\phi|_A(b)),$$

$$\phi|_A\{a, b\} = \frac{1}{2}\{\phi|_A(a), b\} + \frac{1}{2}\{a, \phi|_A(b)\},$$

то есть $\phi|_A \in \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{, \})$. Теорема доказана.

Отметим, что в случае когда Γ — является ассоциативно-коммутативной первичной алгеброй и скобка $\{, \}$ является йордановой скобкой, то по теореме 2.1 мы получаем отсутствие ненулевых δ -супердифференцирований при $\delta \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ для супералгебр йордановой скобки с первичной коммутативно-ассоциативной четной частью.

Список литературы

- [1] Кантор И. Л., Йордановы и лиевы супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона // Алгебра и анализ. Томск, изд-во ТГУ (1989). С.55–80.
- [2] King D., McCrimmon K., The Kantor construction of Jordan Superalgebras // Comm. Algebra. **20** (1992). №1. P.109–126.
- [3] King D., McCrimmon K., The Kantor doubling process revisited // Comm. Algebra. **23** (1995). №1. P.357–372.
- [4] Kantor I. L., Connection between Poisson brackets and Jordan and Lie superalgebras // in «Lie Theory, Differential Equations and Representation Theory», publications in CRM, Montreal (1990). С.213–225.
- [5] Hopkins N. C., Generalizes Derivations of Nonassociative Algebras // Nova J. Math. Game Theory Algebra. **5** (1996). №3. P.215–224.
- [6] Филиппов В. Т., Об алгебрах Ли, удовлетворяющих тождеству 5-ой степени // Алгебра и логика. **34** (1995). №6. С.681–705.
- [7] Филиппов В. Т., О δ -дифференцированиях алгебр Ли // Сиб. матем. ж. **39** (1998). №6. С.1409–1422.
- [8] Филиппов В. Т., О δ -дифференцированиях первичных алгебр Ли // Сиб. матем. ж. **40** (1999). № 1. С.201–213.
- [9] Филиппов В. Т., О δ -дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр // Алгебра и Логика. **39** (2000). № 5. С.618–625.
- [10] Zusmanovich P., On δ -derivations of Lie algebras and superalgebras // J. of Algebra, **324** (2010), №12, 3470–3486. arXiv:0907.2034v2.
- [11] Кайгородов И. Б., О δ -дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр // Алгебра и Логика. **46** (2007). №5. С.585–605.
- [12] Кайгородов И. Б., О δ -дифференцированиях классических супералгебр Ли // Сиб. матем. ж. **50** (2009). №3. С.547–565.
- [13] Кайгородов И. Б., О δ -супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр // Алгебра и логика. **49** (2010). №2. С.195–215.
- [14] Желябин В.Н., Кайгородов И.Б., О δ -супердифференцированиях простых супералгебр йордановой скобки // Алгебра и Анализ. **23** (2011). // http://math.nsc.ru/~kaygorodov/art/st_delta_4_rus.pdf
- [15] Кайгородов И.Б., О δ -супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр // Математические заметки. **88** (2011). // http://math.nsc.ru/~kaygorodov/art/st_delta_5_rus.pdf
- [16] Кайгородов И. Б., О δ -дифференцированиях алгебр и супералгебр // «Проблемы теоретической и прикладной математики», Тезисы 41-ой Всероссийской молодежной школы-конференции 1 февраля – 5 февраля 2010 г.. С.27–33.